

Signaux et Systèmes

Chapitre 8

Signaux et systèmes discrets

Janvier 2021

Table des matières du cours

- Chap 8: Signaux et systèmes discrets
 - Définitions et propriétés de base
 - Transformation en z
- Chap 9: Analyse temporelle
 - Etude fonction de transfert, équations aux différences et réalisations
- Chap 10: Fourier discret
 - DTFT, lien avec les transformation en z et de Fourier
 - DFT
 - FFT!

Table des Matières du Cours

- Chap 11: Analyse fréquentielle
 - Filtres, filtrage, design
- Chap 12: Propriétés statistiques
 - Signaux aléatoires...

8-3

TABLE DES MATIÈRES

8.1 DISCRET/CONTINU

8.2 SIGNAUX TYPE

8.3 QUELQUES OPÉRATEURS

8.4 ESPACES VECTORIELS DE SIGNAUX

8.5 SYSTÈMES LINÉAIRES DISCRETS

8.6 TRANSFORMÉE EN Z

8-4

8.1 DISCRET/CONTINU

- Analogie vecteurs/signaux
- Origine des signaux discrets
- Représentation continue d'un signal discret
- Interpolation

8-5

Analogie vecteurs/signaux

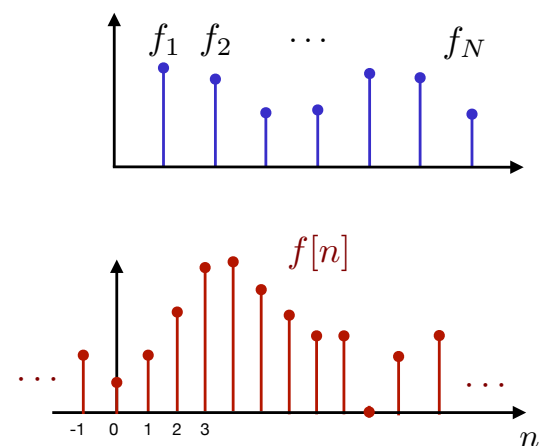
- Vecteur dans \mathbb{R}^N

Notation: $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_N) \in \mathbb{R}^N$

Structure d'espace vectoriel:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathbb{R}^N \quad \Rightarrow \quad \alpha \mathbf{f} + \beta \mathbf{g} \in \mathbb{R}^N$$

Produit scalaire: $\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \sum_{n=1}^N f_n g_n$



- Signal discret = élément d'un espace fonctionnel discret

Signal = **séquence** de nombres réels: vecteur de **dimension infinie** (mais dénombrable).

Notations: $(f[n])_{n \in \mathbb{Z}}$ ou $f[\cdot]$ ou $f \in V(\mathbb{Z})$ ou, simplement, $f[n]$

$V(\mathbb{Z})$: Espace fonctionnel à définir (p. ex. $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$, $\ell_2(\mathbb{Z})$ ou $\ell_\infty(\mathbb{Z})$)

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad f, g \in V(\mathbb{Z}) \quad \Rightarrow \quad \alpha f + \beta g \in V(\mathbb{Z})$$

Produit scalaire discret: $\langle f, g \rangle = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f[n]g[n]$

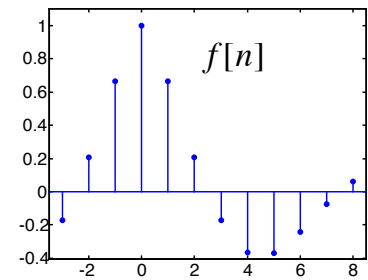
Définitions

Un signal discret est un signal **à temps discret**. Mathématiquement, c'est une fonction f de la variable **entière** n (ou une séquence bi-infinie à valeurs réelles)



Notation: $f \left| \begin{array}{l} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \\ n \mapsto f[n] \end{array} \right.$

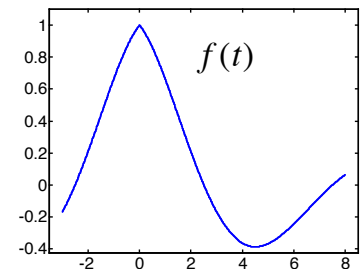
$$f[\cdot] \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$$



$\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ est l'ensemble de toutes les séquences $(f[n])_{n \in \mathbb{Z}}$, $f[n] \in \mathbb{R}$.

Noter la différence avec un signal **à temps continu** qui est une fonction de la variable **réelle**

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto f(t) \end{array} \right.$$



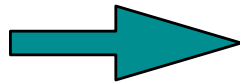
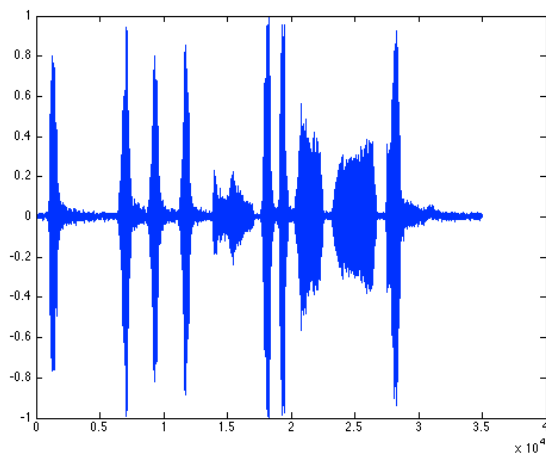
Unser-Vanderghelynst / Sig & Sys II

8-7

Et avant d'aller plus loin...

- Un des succès les plus importants du discret / numérique
 - La compression de données
 - codage audio mp3
 - codage image jpg, j2k
 - codage video mpeg2, mpeg4, h.264

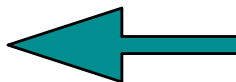
mp3 schématique



Séparation en
32 bandes de
fréquences



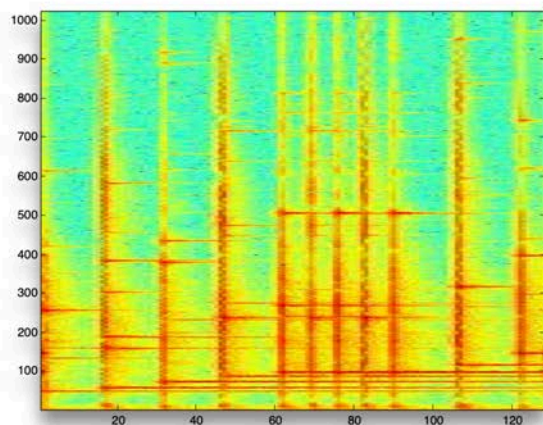
Codage



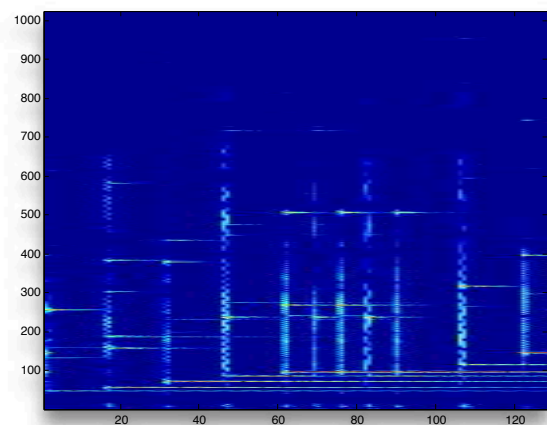
Quantification

EPFL

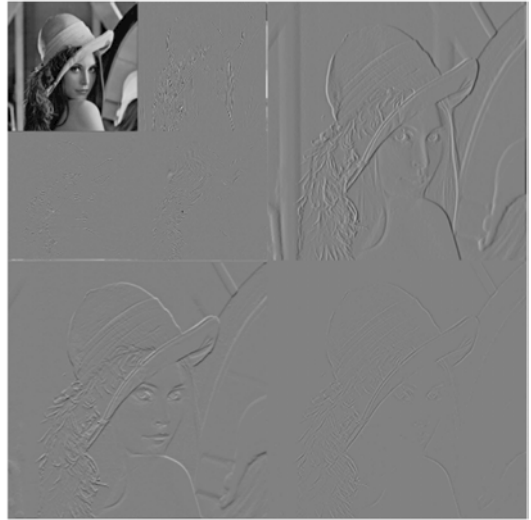
MDCT



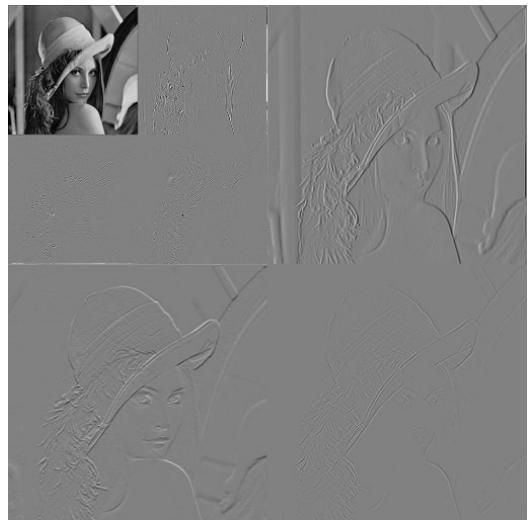
10 % coefficients



La compression d'images fonctionne
de la même manière



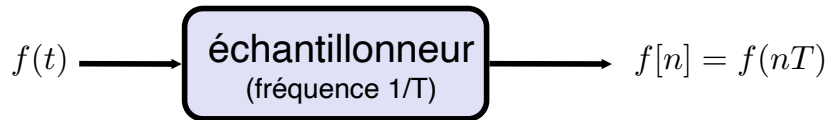
La compression d'images fonctionne
de la même manière



75% des coefficients effacés !

Origine des signaux discrets

Un signal discret est souvent le résultat de l'**échantillonnage uniforme** d'un signal continu



Il existe aussi des signaux qui sont **naturellement** discrets (et souvent quantifiés):

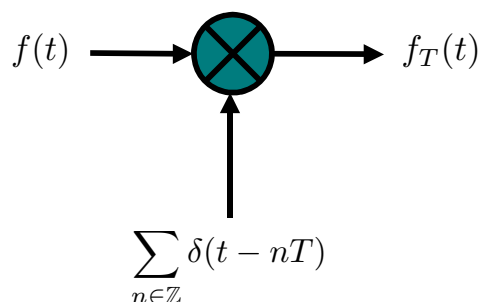
- phénomènes quantiques (p.ex. comptage de photons)
- événements ponctuels (p.ex. nombre d'abstentionnistes lors d'élections)

Représentation continue d'un signal discret

Un signal discret $f[n]$ peut se représenter de manière équivalente à l'aide d'un signal continu $f_T(t)$

$$f_T(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f[n] \cdot \delta(t - nT)$$

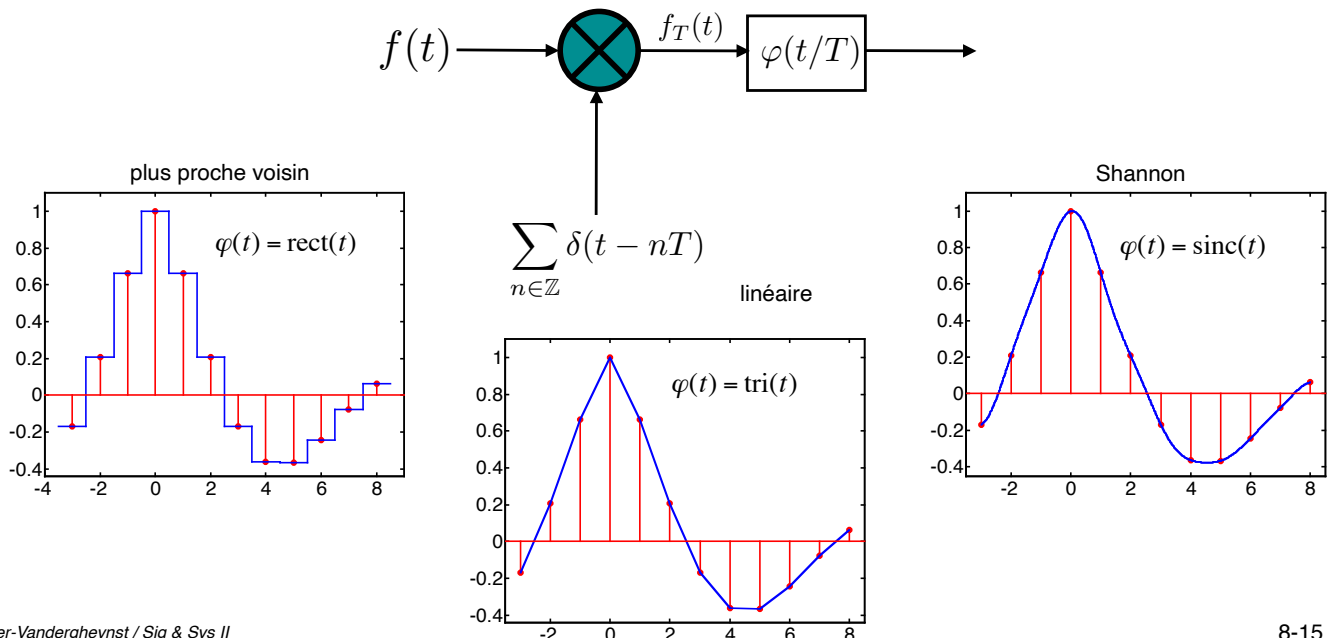
Dans le cas d'un signal discret obtenu par échantillonnage, le lien est la multiplication par le **peigne de Dirac** à la fréquence 1/T



Interpolation

À l'aide de la représentation continue $f_T(t)$ du signal échantillonné $f[n]$, on peut exprimer la version **interpolée** de ce signal en utilisant une fonction d'interpolation $\varphi(t)$ ($\text{sinc}(t)$, $\text{rect}(t)$, $\text{tri}(t)$, par exemple)

$$f_{\text{interpolée}}(t) = f_T(t) * \varphi(t/T)$$



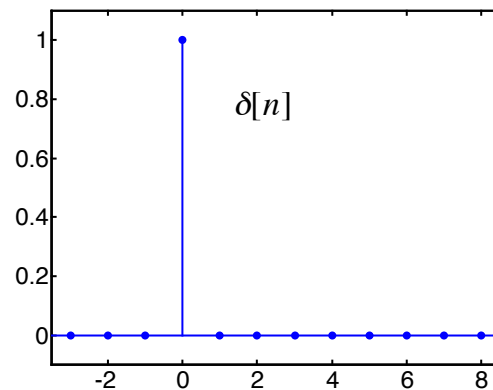
8-15

8.2 SIGNAUX TYPE

- L'impulsion discrète $\delta[n]$
- Le saut unité discret $u[n]$
- Signaux binaires et rectangulaires
- La fonction polynôme causal discret $s_+^N[n]$
- L'exponentielle causale discrète
- Signaux périodiques
- Représentation canonique des signaux discrets

L'impulsion discrète $\delta[n]$ (ou de Kronecker)

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & \text{si } n = 0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$



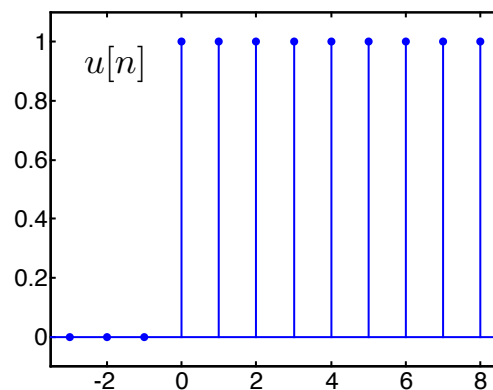
Cette fonction est identique à la suite δ_n de **Kronecker**.



$\delta[n]$ **n'est pas** une version échantillonnée de la distribution de Dirac $\delta(t)$

Le saut unité discret $u[n]$

$$u[n] = \begin{cases} 1, & \text{si } n \geq 0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$



C'est une version échantillonnée de la fonction saut unité continue

$$u[n] = u\left((n + \frac{1}{2})T\right)$$

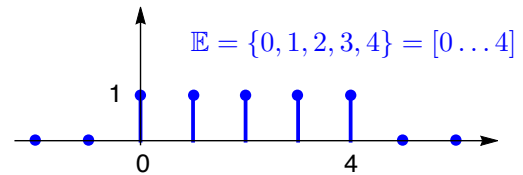
Remarque: $u[n] - u[n-1] = \delta[n]$

Signaux binaires et rectangulaires

■ Fonction indicatrice

Soit un ensemble \mathbb{E} d'indices discrets. On définit

$$\mathbb{1}_{\mathbb{E}}[n] = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in \mathbb{E} \\ 0 & \text{si non.} \end{cases}$$



■ Signaux rectangulaires

$\mathbb{E} = \{n_1, \dots, n_2\}$ avec $n_1 < n_2 \in \mathbb{Z}$ est un interval discret noté par $[n_1 \dots n_2]$

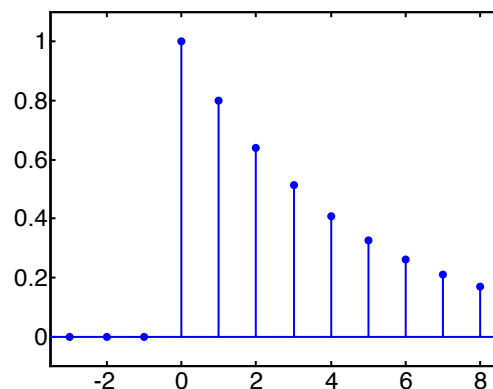
$$\mathbb{1}_{[n_1 \dots n_2]}[n] = \begin{cases} 1 & \text{si } n_1 \leq n \leq n_2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

■ Cas particuliers

- Saut indiciel: $u[\cdot] = \mathbb{1}_{[0 \dots \infty)}[\cdot] = \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_{\geq 0}}[\cdot]$
- Impulsion de Kroneker en $n = n_0$: $\delta[\cdot - n_0] = \mathbb{1}_{\{n_0\}}[\cdot]$

L'exponentielle causale discrète

$$a^n u[n] = \begin{cases} a^n, & \text{si } n \geq 0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$



Version échantillonnée de la fonction exponentielle causale

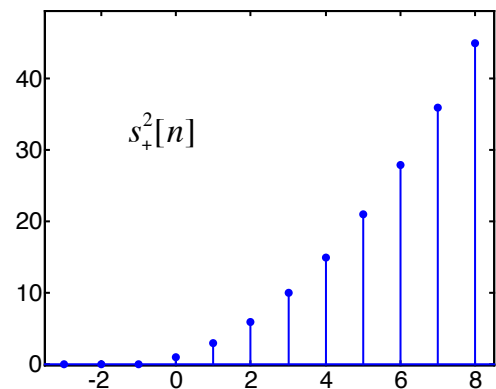
$$a^n u[n] = u(t) \exp\left(\frac{t}{T} \log a\right) \Big|_{t=nT}$$

La fonction polynôme causal discret $s_+^N[n]$

Pour $N \geq 1$ on définit

$$s_+^N[n] = \begin{cases} \frac{(n+1)(n+2)\dots(n+N)}{N!}, & \text{si } n \geq 0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

et si $N = 0$, on pose $s_+^0[n] = u[n]$



Remarque: $s_+^N[n] - s_+^N[n-1] = s_+^{N-1}[n]$.

Par ailleurs, il faut noter que $s_+^N[n] = \binom{n+N}{n} u[n]$.

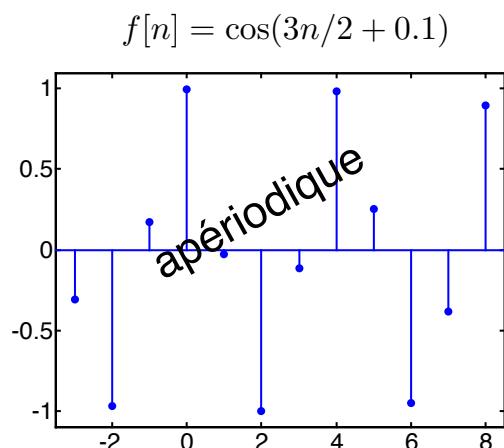
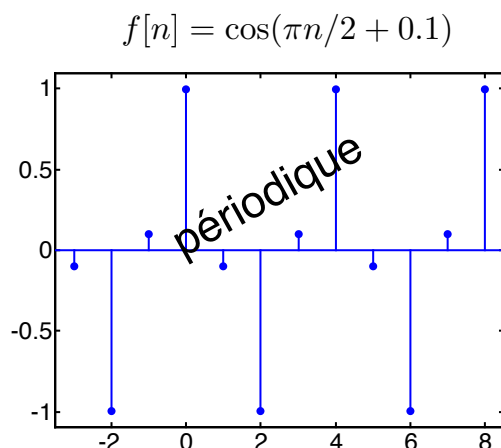
Signaux périodiques

Un signal discret $f[n]$ est périodique si et seulement si, pour $n \in \mathbb{Z}$, il existe un **nombre entier** N tel que

$$f[n+N] = f[n]$$



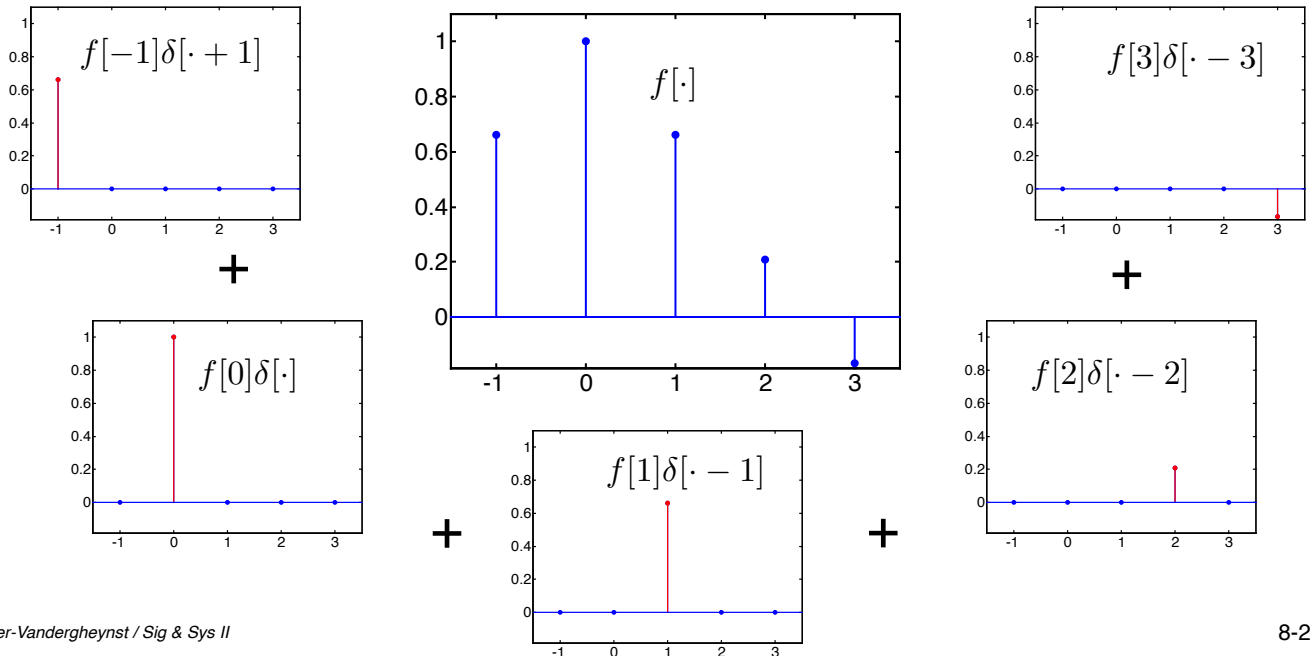
Un signal périodique continu échantillonné n'est pas nécessairement périodique.



Représentation canonique des signaux discrets

Tout signal discret peut s'exprimer comme une combinaison linéaire d'impulsions discrètes décalées $\delta[\cdot - n_0]$

$$f[n] = \sum_{n_0=-\infty}^{+\infty} f[n_0] \cdot \delta[n - n_0] \quad \text{ou} \quad f[\cdot] = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f[n] \delta[\cdot - n]$$



Unser-Vandergheynst / Sig & Sys II

8-23

8.3 QUELQUES OPÉRATEURS

- Décalage
- Echantillonnage
- Transformations ponctuelles
- Quantification

Opérateur de décalage $S = \text{“Shift”}$

$$f[n] \mapsto S\{f\}[n] = f[n-1]$$

$$\text{Forme concise: } Sf = f[\cdot - 1]$$

■ Propriétés

■ Linéarité:

$$S\{af_1[\cdot] + f_2[\cdot]\}[n] = aS\{f_1\}[n] + S\{f_2\}[n] \text{ pour tout } a \in \mathbb{R}$$

■ Itérations: $S^k\{f\}[n] = f[n-k]$

■ Identité: $S^0 = I$

■ Structure de semi-groupe: $S^{k_1}S^{k_2} = S^{k_1+k_2}$ pour tout $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$

■ Combinaison linéaires of K décalages

$$S_{\mathbf{w}}\{f\} = \sum_{k=0}^{K-1} w_k S^k\{f\} = \sum_{k=0}^{K-1} w_k f[\cdot - k]$$

$$\text{Poids: } \mathbf{w} = (w_0, \dots, w_{K-1}) \in \mathbb{R}^K$$

Exemple: Opérateur de différences

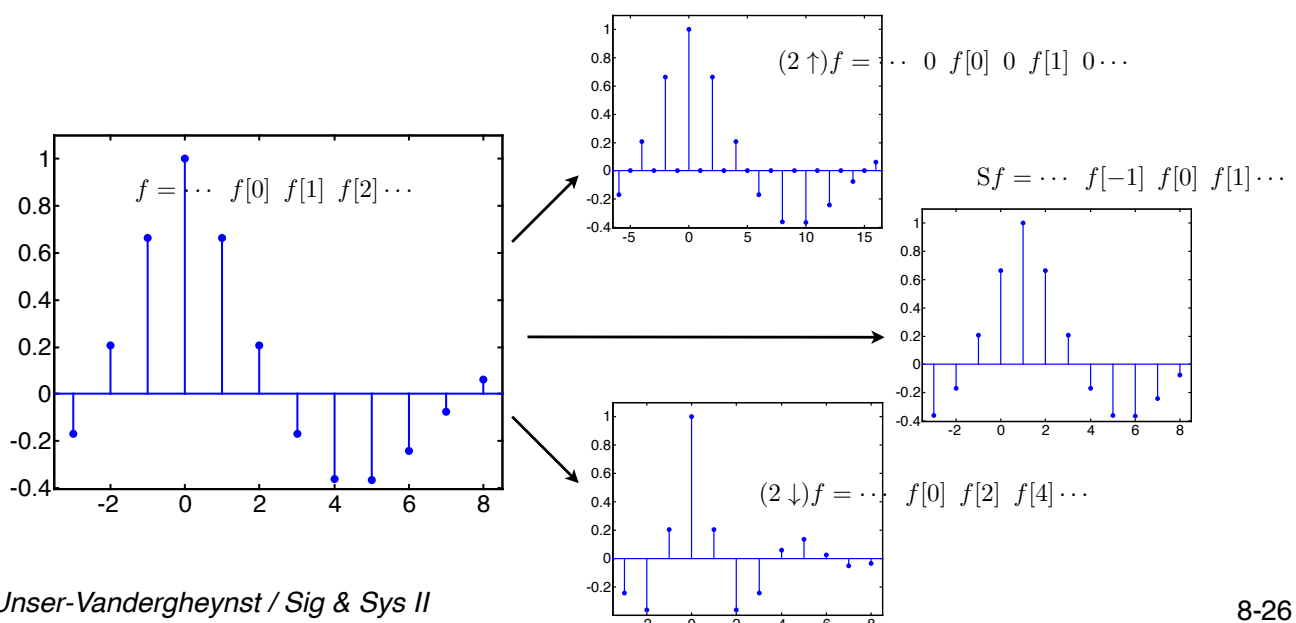
$$(I - S)f = f[\cdot] - f[\cdot - 1]$$

$$(w_0, w_1) = (1, -1)$$

Echantillonnage

• Sous-échantillonnage: $f[n] \mapsto (M \downarrow)f[n] = f[Mn]$

• Sur-échantillonnage: $f[n] \mapsto (\uparrow M)f[m] = \begin{cases} f[n], & \text{si } m = Mn \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$



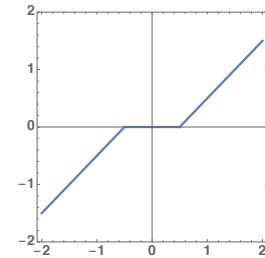
Transformations ponctuelles

Soit $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle donnée.

■ Non-linéarité ponctuelle $T(f)$

$$f[n] \mapsto T(f[n])$$

Principe: chaque échantillon du signal subit la même transformation scalaire T .

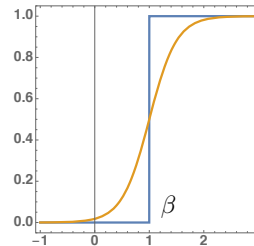


■ Cas particuliers

■ Seuillage (binarisation):

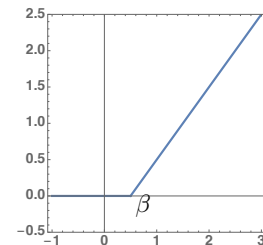
$$f \mapsto \begin{cases} 1, & \text{si } f \geq \beta \text{ (seuil)} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

■ Sigmoid: $f \mapsto \frac{1}{1+e^{-\alpha(f-\beta)}}$



■ Rectified linear unit (pour réseau de neurones):

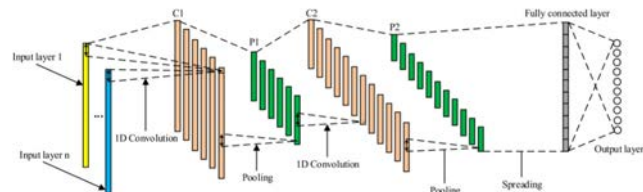
$$f \mapsto \text{ReLU}(f; \beta) = (f - \beta)_+, \quad \beta \in \mathbb{R} \text{ (biais)}$$



Application: CNN (convolutional neural networks)

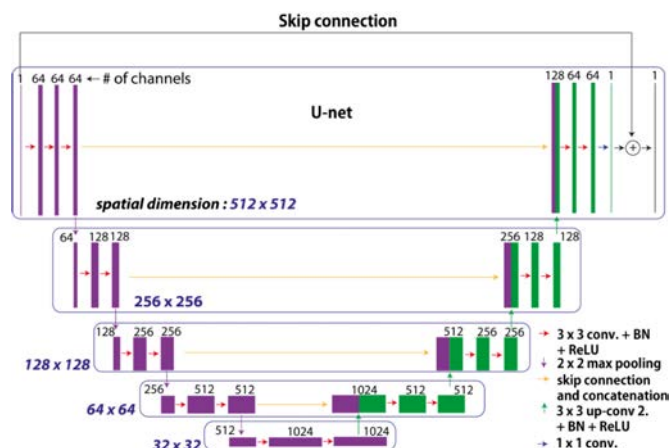
■ Module de convolution: poids w_k partagés au travers d'une fenêtre glissante

$$T_{\text{conv}}\{f\} = \sum_{k=0}^K w_k S^k\{f\} = \sum_{k=0}^K w_k f[\cdot - k]$$



■ Fonction d'activation d'un neurone: ReLU ou sigmoïde

■ Structure pyramidale: U-net (par re-échantillonnage)



8.4 ESPACES VECTORIELS DE SIGNAUX

- Espaces des signaux à énergie finie
- Espaces vectoriels discrets $\ell_p(\mathbb{Z})$
- Produit scalaire étendu
- Exemples

8-29

Structure mathématique sous-jacente

Les signaux discrets sont **mathématiquement** plus simples que les signaux continus:

✓ Il n'y a **pas** de notion de “presque partout”

✓ Un signal n'a **pas de valeurs infinies** $f[n] \neq \infty, \forall n \in \mathbb{Z}$

✓ Il n'y a **pas** de notion de continuité, dérivabilité, etc...

✓ On peut avoir une bonne approximation d'un signal discret d'énergie finie à l'aide d'un **nombre fini** de ses valeurs

Donc, on peut développer une théorie qui est plus directement accessible aux étudiants ingénieurs que la théorie des distributions, établie de *Laurent Schwartz*.

Espaces des signaux à énergie finie

■ Espace des signaux discrets à énergie finie

$$\ell_2(\mathbb{Z}) = \{f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C} : \|f\|_{\ell_2}^2 \triangleq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |f[n]|^2 < \infty\}$$

■ $\ell_2(\mathbb{Z})$ est un **espace de Hilbert** équipé avec le **produit scalaire** discret

$$\langle f, g \rangle_{\ell_2} \triangleq \sum_{n \in \mathbb{Z}} f[n] g^*[n]$$

Exemples:

- $a^n u[n] \in \ell_2(\mathbb{Z})$ pour $|a| < 1$ (exponentielle causale décroissante)
- $\{\delta[\cdot - m]\}_{m \in \mathbb{Z}}$ est une base orthonormale de $\ell_2(\mathbb{Z})$

■ Inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|\langle f, g \rangle_{\ell_2}| \leq \|f\|_{\ell_2} \|g\|_{\ell_2} \quad \text{pour tout } f, g \in \ell_2(\mathbb{Z})$$

Normes discrètes non-Euclidiennes

■ Normes- ℓ_p pour $p \in [1, \infty]$

$$\|f\|_{\ell_p} \triangleq \begin{cases} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |f[n]|^p \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{si } p \in [1, \infty) \\ \sup_{n \in \mathbb{Z}} |f[n]|, & \text{si } p = +\infty. \end{cases}$$

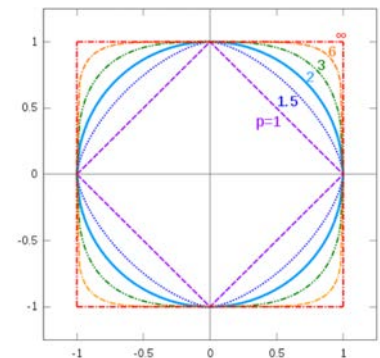
■ Propriétés caractéristiques d'une norme

- Non-négativité: $\|f\|_{\ell_p} \geq 0$ avec $\|f\|_{\ell_p} = 0 \Leftrightarrow f = 0$
- Homogénéité: $\|\alpha \cdot f\|_{\ell_p} = |\alpha| \cdot \|f\|_{\ell_p}$ pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$
- Inégalité triangulaire: $\|f + g\|_{\ell_p} \leq \|f\|_{\ell_p} + \|g\|_{\ell_p}$

■ Propriété de hiérarchisation

$$\|f\|_{\ell_\infty} \leq \|f\|_{\ell_q} \leq \|f\|_{\ell_p} \leq \|f\|_{\ell_1}$$

pour tout signal $f[\cdot]$ et $1 \leq p \leq q \leq \infty$.



Espaces vectoriels discrets

■ Espaces de signaux discrets $\ell_p(\mathbb{Z})$ pour $p \geq 1$

$$\ell_p(\mathbb{Z}) = \{f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} : \|f\|_{\ell_p} < \infty\}$$

Ce sont des **espaces de Banach** (c-à-d. des espaces normés complets)

Cas particuliers

- $p = 2$: $\ell_2(\mathbb{Z})$ est l'espace des signaux discrets à **énergie finie**
- $p = 1$: $\ell_1(\mathbb{Z})$ est l'espace des signaux discrets **sommables** (en valeur absolue)
- $p = \infty$: $\ell_\infty(\mathbb{Z})$ est l'espace des signaux discrets **bornés**

■ Propriétés d'imbrication (embeddings)

$$\ell_1(\mathbb{Z}) \subseteq \ell_p(\mathbb{Z}) \subseteq \ell_q(\mathbb{Z}) \subseteq \ell_\infty(\mathbb{Z})$$

pour $1 \leq p \leq q \leq \infty$.

Produit scalaire étendu

Definition: Les indices $p, p' \in [1, \infty]$ forment une paire **conjuguée** si $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Par exemple: $(p, p') = (1, \infty), (2, 2), (\infty, 1)$

■ Extension du produit scalaire = produit de dualité

Pour $f \in \ell_p(\mathbb{Z})$ et $g \in \ell_{p'}(\mathbb{Z})$ où p, p' sont des indices conjugués, on définit:

$$\langle f, g \rangle \triangleq \sum_{n \in \mathbb{Z}} f[n]g[n]$$

Propriété: L'application $(f, g) \mapsto \langle f, g \rangle$ est une forme **bilinéaire** et **continue** $\ell_p(\mathbb{Z}) \times \ell_{p'}(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{R}$.

■ Inégalité de Hölder

Pour tout $f \in \ell_p(\mathbb{Z})$ et $g \in \ell_{p'}(\mathbb{Z})$ où p, p' sont des indices conjugués, on a:

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\|_{\ell_p} \|g\|_{\ell_{p'}}$$

Généralisation de l'inégalité de Cauchy-Schwarz ($p = p' = 2$).

Signaux à support fini

■ Troncation temporelle/restriction d'un signal

Soit un ensemble \mathbb{E} d'indices discrets temporels. On définit

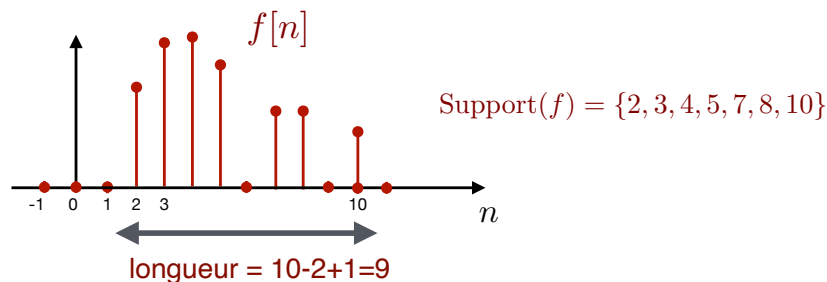
$$f_{\mathbb{E}}[n] \triangleq f[n] \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{E}}[n] = \begin{cases} f[n], & \text{si } n \in \mathbb{E} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

■ Support d'un signal

$\mathbb{F} = \text{support}(f) = \{n : f[n] \neq 0\}$ (ensemble des indices actifs)

Longueur ou taille du signal: $\max(\mathbb{F}) - \min(\mathbb{F}) + 1$

Le support est dit **fini** (ou compact) si sa longueur est finie.



Signaux bornés vs. non-restreints

Definition: Le signal discret f est dit

- **borné** $\Leftrightarrow \sup_{n \in \mathbb{Z}} |f[n]| < \infty \Leftrightarrow f \in \ell_{\infty}(\mathbb{Z})$
- **à support fini** ssi il existe $n_0 \leq n_1 \in \mathbb{Z}$ tel que $f_{[n_0 \dots n_1]}[\cdot] = f[\cdot] \in \ell_{\infty}(\mathbb{Z})$.
- **localement sommable/borné** si $f_{[-N \dots N]}[\cdot] \in \ell_1(\mathbb{Z}) \subseteq \ell_{\infty}(\mathbb{Z})$ pour tout $N \in \mathbb{N}$.

Les espaces vectoriels correspondant sont dénotés par $\ell_{\infty}(\mathbb{Z})$, $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$, $\mathcal{D}'(\mathbb{Z}) = \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$.

■ Propriétés d'inclusion (pour $1 \leq p \leq q \leq \infty$)

$$\mathcal{D}(\mathbb{Z}) \subseteq \dots \subseteq \ell_1(\mathbb{Z}) \subseteq \ell_p(\mathbb{Z}) \subseteq \ell_q(\mathbb{Z}) \subseteq \ell_{\infty}(\mathbb{Z}) \subseteq \dots \subseteq \mathcal{D}'(\mathbb{Z})$$

NB: Les distinctions sont dues exclusivement au comportement à l'infini.

Soit $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{Z})$ et $g \in \mathcal{D}(\mathbb{Z})$ avec $\mathbb{G} = \text{support}(g)$ fini. Alors,

$$\langle f, g \rangle \leq \sum_{n \in \mathbb{G}} |f[n]| |g[n]| \leq \|f\|_{\ell_{\infty}} \|g\|_{\ell_1} < \infty$$



Complément: Topologie de $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$ et $\mathcal{D}'(\mathbb{Z})$

\mathbb{E} : domaine de longueur finie (compact)

■ $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$: l'espace des signaux "test" à support fini

- $e \in \mathcal{D}(\mathbb{Z}) \Leftrightarrow e[\cdot] \in \ell_\infty(\mathbb{Z})$ et il existe \mathbb{E} compact tel que $e[n] = 0, \forall n \notin \mathbb{E}$.
- Une séquence de signaux $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ converge vers e dans $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$
 \Leftrightarrow il existe \mathbb{E} compact tel que $\text{support}(e_i) \subseteq \mathbb{E}$ et $\lim_{i \rightarrow \infty} \|e - e_i\|_{\ell_\infty} = 0$.

■ $\mathcal{D}'(\mathbb{Z})$: l'espace non-restreint de signaux

- $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{Z}) = \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \Leftrightarrow |f[n]| < \infty$ pour n'importe quel $n \in \mathbb{Z}$ (fini).
- Une séquence de signaux $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ converge vers f dans $\mathcal{D}'(\mathbb{Z})$
 $\Leftrightarrow \lim_{i \rightarrow \infty} \langle f_i, e \rangle = \langle f, e \rangle$ pour tout $e \in \mathcal{D}(\mathbb{Z})$.

Soit $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{Z})$ et $e \in \mathcal{D}(\mathbb{Z})$ avec $\text{support}(e) \subseteq \mathbb{E}$ compact. Alors,

$$|\langle f, e \rangle| \leq \sum_{n \in \mathbb{E}} |f[n]| |e[n]| \leq \|f\|_{\ell_1} \|e\|_{\ell_\infty} < \infty$$

Exemples de catégorisation

■ Signaux à support fini: $f[\cdot] \in \mathcal{D}(\mathbb{Z})$

$$f_N[\cdot] = \sum_{n=n_0}^{N-1+n_0} f[n] \delta[\cdot - n]$$

■ Signaux non-restreints: $f[\cdot] \notin \ell_\infty(\mathbb{Z})$

- Exponentielles bilatérales: $n \mapsto a^n$ avec $a \neq 0$
- Polynômes discrets: $s_+^N[\cdot]$ avec $N \geq 1$.

■ Signaux bornés: $f[\cdot] \in \ell_\infty(\mathbb{Z})$

- Exponentielle causale avec $|a| < 1$: $a^n u[n] \in \ell_1(\mathbb{Z}) \subseteq \ell_2(\mathbb{Z})$
- (Co-)sinusoides discrètes avec $\omega_0 \in \mathbb{R}$: $n \mapsto A \cos(\omega_0 n) \notin \ell_1(\mathbb{Z})$

$f[n]$	$g[n]$	$\langle f, g \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f[n]g[n]$	
a^n	$-a\delta[n+1] + \delta[n]$	$-a \cdot a^{-1} + 1 = 0$	$\mathcal{D}'(\mathbb{Z}) \times \mathcal{D}(\mathbb{Z})$
$u[n] \left(\frac{1}{2}\right)^n$	$u[n] \left(\frac{1}{3}\right)^n$	$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{6}}$	$\ell_2(\mathbb{Z}) \times \ell_2(\mathbb{Z})$
$\forall n, p_0[n] = 1 \in \ell_\infty(\mathbb{Z})$	$(-1)^n$	non-défini!	$\ell_\infty(\mathbb{Z}) \times \ell_\infty(\mathbb{Z})$

8.5 SYSTÈMES LINÉAIRES DISCRETS

- Analogie matrice/système linéaire
- Définition et représentation
- Systèmes LID
- Convolution discrète
- Stabilité des opérateurs LID
- Algèbre des opérateurs LID
- Exemple de calcul
- Table de convolutions discrètes

8-39

Analogie **matrice**/système linéaire

- Transformation linéaire: $\mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$

$$\mathbf{y} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{x} \quad \Leftrightarrow \quad y_m = \sum_{n=1}^N h_{m,n} x_n$$

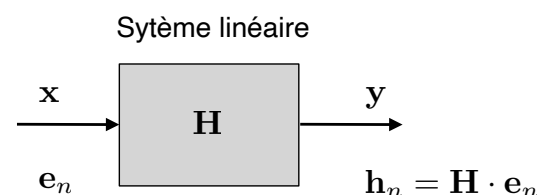
- Entrée: $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$
- Sortie: $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_N)$
- Matrice \mathbf{H} : $[\mathbf{H}]_{m,n} = h_{m,n}, \quad m, n \in \{1, \dots, N\}$

- Identification du système matriciel

- But: déterminer les éléments de la matrice $\mathbf{H} = [\mathbf{h}_1 \cdots \mathbf{h}_N]$
- Méthode: série d'excitations élémentaires $\{\mathbf{e}_n\}_{n=1, \dots, N}$
- Propriété de la base canonique: $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N, \quad \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_{n_0} \rangle = x_{n_0}$

Système linéaire en temps discret:

$$y[m] = \sum_{n \in \mathbb{Z}} H[m, n] x[n]$$



Contrepartie en temps discret: impulsions de Kronecker $n \mapsto \delta[n - n_0]$

$$\langle f, \delta[\cdot - n_0] \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f[n] \delta[n - n_0] = f[n_0]$$

Définition et représentation

Les systèmes linéaires discrets sont des opérateurs **linéaires** qui agissent sur les signaux discrets:

$$f[n] \rightarrow \boxed{T\{\cdot\}} \rightarrow g[n]$$

Rappel: linéarité $\Leftrightarrow T\{a_1 f_1 + a_2 f_2\} = a_1 T\{f_1\} + a_2 T\{f_2\}$ pour tout $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ (ou \mathbb{C})

Exemples

- Les opérateurs de décalage et d'échantillonnage sont linéaires
- Les opérateurs de quantification ne sont pas linéaires

Représentation: Un système linéaire discret T est entièrement décrit par la donnée d'une fonction de deux variables entières $H[n, k]$ telle que

$$T\{f\}[n] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} H[n, k] f[k]$$

Preuve

1. Représentation canonique: $f[\cdot] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f[k] \delta[\cdot - k]$
2. Linéarité de T : $T\{f\}[n] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f[k] \underbrace{T\{\delta[\cdot - k]\}[n]}_{H[n, k]}$

Systèmes linéaires invariant par décalage (LID)

Les systèmes LID sont des systèmes linéaires discrets qui sont en outre **invariants par décalage**

$$T\{S^k f\} = S^k T\{f\} \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{Z}$$

Ainsi, un système est LID si et seulement si il est linéaire et

$$\begin{aligned} H[n, m] &= T\{\delta[\cdot - m]\}[n] \\ &= T\{\delta\}[n - m] \\ &= H[n - m, 0] = h[n - m] \end{aligned}$$

c'est-à-dire, si et seulement s'il existe une **réponse impulsionnelle discrète** telle que



$$T\{f\}[n] = \sum_{m \in \mathbb{Z}} h[n - m] f[m]$$

Exemples

- S est LID, de réponse impulsionnelle $h[n] = \delta[n - 1]$
- $(M \uparrow)$ et $(M \downarrow)$ ne sont pas LID

Remarque: il y a équivalence *formelle* entre signal et système LID.

Convolution discrète

Soit $f[\cdot]$ et $g[\cdot]$ deux signaux discrets. Alors, leur **convolution discrète** est donnée par

$$(f * g)[n] \triangleq \sum_{k \in \mathbb{Z}} f[k] \cdot g[n - k] = \langle f, g[n - \cdot] \rangle$$

$$= \sum_{m \in \mathbb{Z}} f[n - m] \cdot g[m]$$

(par changement de variable $m = n - k$)

La convolution est une opération

- **commutative:** $(f * g)[n] = (g * f)[n]$
- **associative:** $(f * (g * h))[n] = ((f * g) * h)[n]$ si $h \in \ell_\infty(\mathbb{Z})$ et $f, g \in \ell_1(\mathbb{Z})$
- **distributive** par rapport à l'addition:

$$(f * (g + h))[n] = (f * g)[n] + (f * h)[n]$$

L'impulsion discrète est l'**élément neutre** de la convolution discrète:

$$(\delta * g)[n] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta[k] \cdot g[n - k] = \langle \delta[\cdot], g[n - \cdot] \rangle = g[n]$$

Convolution: décomposition en étape

■ Impulsion unitaire à l'origine



Définition de la
réponse impulsionnelle

■ Impulsion unitaire à k_0



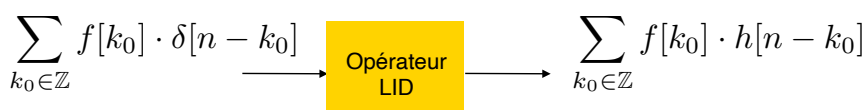
Invariance par
décalage

■ Echantillon en k_0 de valeur $f[k_0]$



Linéarité

■ Signal = somme d'échantillons



Superposition

$$= (f * h)[n] = (h * f)[n]$$

Exemple

Soit à calculer la convolution discrète de

$$f[n] = \begin{cases} 0.2, & \text{pour } n = -1 \\ -0.2, & \text{pour } n = 0 \\ 0.1, & \text{pour } n = 2 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad g[n] = \begin{cases} 1, & \text{pour } n = 0 \\ 2, & \text{pour } n = 1 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

*	0.1	0	-0.2, 1	0.2	} ranger $f[n]$ et $g[n]$ dans l'ordre des n décroissants
		2			
+	2×0.1	2×0	$2 \times -0.2,$ 2×0.2	1×0.2	} effectuer les calculs comme dans l'algorithme de multiplication
		2×-0.2			
	0.2	0.1	-0.4	0.2 ,	$= (f * g)[n]$

indique la séparation entre les indices
 $n \leq 0$ (à gauche) et $n < 0$ (négatif à droite)

Quand la convolution est-elle bien posée?

Cadre non-restreint:

La convolution $(h * f)[n]$ n'est pas forcément bien définie pour tout $h, f \in \mathcal{D}'(\mathbb{Z}) = \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$.

Par contre, si l'on tronque la réponse impulsionnelle $h[\cdot]$ à l'intervall $[-N \dots N]$, on a:

$$\begin{aligned} |(h_{[-N \dots N]} * f)[n]| &\leq \sum_{k=-N}^N |h[k]| \cdot |f[n-k]| \\ &\leq \sum_{k=-N}^N |h[k]| \max_{m \in [n-N \dots n+N]} |f[m]| \\ &= \|h_{[-N \dots N]}\|_{\ell_1} \cdot \|f_{[n-N \dots n+N]}\|_{\ell_\infty} < \infty \end{aligned}$$

pour tout $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{Z})$ et $N \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{Z}$.

De façon similaire, si $h \in \mathcal{D}'(\mathbb{Z})$ et $f \in \mathcal{D}(\mathbb{Z})$ avec $\text{support}(f) \subseteq [-N \dots N]$, on a

$$|(h * f)[n]| \leq \sum_{k=-N}^N \max_{m \in \mathbb{Z}} |f[m]| |h[n-k]| = \|h_{[n-N \dots n+N]}\|_{\ell_1} \cdot \|f\|_{\ell_\infty}$$

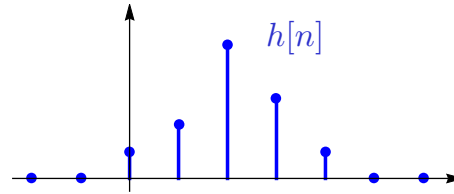
qui montre que $h * f \in \mathcal{D}'(\mathbb{Z})$.



Systèmes à réponse impulsionnelle finie (RIF)

Soit le système LID spécifié par l'opérateur de convolution discret $S_h : f \mapsto h * f$.

- Le système est à **réponse impulsionnelle finie** ssi $\text{support}(h)$ est fini;
c.-à-d. s'il existe $n_1 \leq n_2 \in \mathbb{Z}$ tels que $h[n] = 0, \forall n \notin [n_1 \dots n_2]$.



■ Propriété

- La convolution de deux signaux de support fini est à support fini:
 $h, f \in \mathcal{D}(\mathbb{Z}) \Rightarrow h * f \in \mathcal{D}(\mathbb{Z})$.

Soient $h_1[\cdot], h_2[\cdot]$ de longueur respective N_1 et N_2 . Alors $(h_1 * h_2)[\cdot]$ est à support fini de longueur au plus $(N_1 + N_2 - 1)$ avec $\|h_1 * h_2\|_{\ell_\infty} \leq \|h_1\|_{\ell_1} \cdot \|h_2\|_{\ell_\infty} < \infty$.

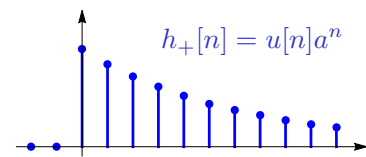
Normes équivalentes: $\|h_i\|_{\ell_\infty} = \max_{n \in \mathbb{Z}} |h_i[n]| \leq \|h_i\|_{\ell_1} \leq N_i \|h_i\|_{\ell_\infty}, \quad i = 1, 2$

Systèmes causaux

Notation: $h_+[n] = u[n] \cdot h[n]$

Définition: Un signal discret $h[\cdot]$ est dit **causal** si $h[n] = 0$ pour tout $n < 0$.

De même, le système LID, $S_{h_+} : f \mapsto h_+ * f$, est **causal** lorsque sa réponse impulsionnelle h_+ est causale.



- Espace vectoriel (non-restreint) des signaux causaux:

$$\mathcal{D}'_+(\mathbb{Z}) = \{f_+ \in \mathcal{D}'(\mathbb{Z}) = \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} : f_+[n] = 0, \forall n < 0\}$$

- La convolution de deux signaux causaux h_+, f_+ est causale:

$$(h_+ * f_+)[n] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_+[k] f_+[n-k] = \begin{cases} \sum_{k=0}^n h_+[k] f_+[n-k], & \text{si } n \geq 0 \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

- La convolution de deux signaux causaux est **toujours bien définie**:

$$h, f \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{Z}) \Rightarrow h * f \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{Z})$$

En effet: $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |(h * f)[n]| \leq \sum_{k=0}^n |h[k]| \cdot |f[n-k]| \leq \|h_{[0 \dots n]}\|_{\ell_1} \cdot \|f_{[0 \dots n]}\|_{\ell_\infty} < \infty$

Exemples de calcul

Soit à convoluer $a^n u[n]$ et $b^n u[n]$ où $a \neq b$:

$$\begin{aligned} a^n u[n] * b^n u[n] &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} a^k u[k] \cdot b^{n-k} u[n-k] \\ &= \begin{cases} \sum_{k=0}^n a^k \cdot b^{n-k}, & \text{si } n \geq 0 \\ 0, & \text{si } n < 0 \end{cases} \\ &= u[n] \cdot b^n \sum_{k=0}^n (a/b)^k = u[n] \cdot b^n \frac{1 - (a/b)^{n+1}}{1 - (a/b)} \\ &= u[n] \cdot \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b - a} \\ &= \left(\left(\frac{a}{a-b} \right) a^n - \left(\frac{b}{a-b} \right) b^n \right) u[n] \end{aligned}$$

Rappel: suite géométrique avec $q \neq 1$

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

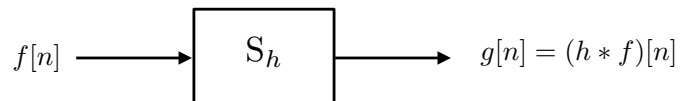
Fonction MatLab correspondante: $C = \text{CONV}(A, B)$

Exemple:

» $A = [-1 \ 1]$; équivalent à $A[0] = -1, A[1] = -1$ et $A[n] = 0$ sinon
 » $B = [0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4]$; équivalent à $B[0] = 0, B[1] = 1 \dots B[4] = 4$ et $B[n] = 0$ sinon
 » $C = \text{CONV}(A, B)$ équivalent à $C[n] = (A * B)[n]$
 $C =$

0	-1	-1	-1	-1	4
---	----	----	----	----	---

Stabilité des opérateurs LID



Définition: L'opérateur de convolution $S_h : f \mapsto h * f$ avec $h \in \mathcal{D}'(\mathbb{Z}) = \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ est ℓ_p -stable s'il existe une constante $0 < C < \infty$ telle que, pour tout $f \in \ell_p(\mathbb{Z})$,

$$\|S_h\{f\}\|_{\ell_p} = \|h * f\|_{\ell_p} \leq C \|f\|_{\ell_p}.$$

Si S_h est ℓ_p -stable, alors $f \in \ell_p(\mathbb{Z}) \Rightarrow S_h\{f\} = h * f \in \ell_p(\mathbb{Z})$

Stabilité BIBO (bounded-input bounded-output) = stabilité au sens ℓ_∞

Théorème: S_h est BIBO-stable $\Leftrightarrow h \in \ell_1(\mathbb{Z})$.

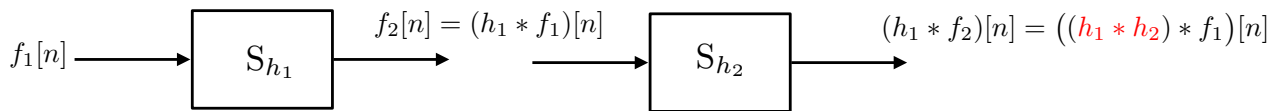
Preuve: 1) Suffisance de $h \in \ell_1(\mathbb{Z}) \Leftrightarrow \|h\|_{\ell_1} < \infty$

$$\begin{aligned} |(h * f)[n]| &\leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} |h[k]| |f[n-k]| \leq \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |h[k]| \right) \left(\sup_{m \in \mathbb{Z}} |f[m]| \right) \\ &\Rightarrow \|h * f\|_{\ell_\infty} \leq \|h\|_{\ell_1} \|f\|_{\ell_\infty} \end{aligned}$$

2) Nécessité: On prend $f_0[-k] = \text{sign}(h[k])$ (excitation bornée la plus défavorable)

$$(h * f_0)[0] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h[k] f_0[-k] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |h[k]| \leq C \underbrace{\|f_0\|_{\ell_\infty}}_1 < \infty \text{ (car BIBO-stable)}$$

Convolution: stabilité de composition



Question: S_{h_1} et S_{h_2} BIBO stable $\Rightarrow S_{h_1 * h_2}$ BIBO stable ?

ou, de façon, équivalente: $h_1, h_2 \in \ell_1(\mathbb{Z}) \Rightarrow h_1 * h_2 \in \ell_1(\mathbb{Z})$?

Stabilité de composition = stabilité au sens ℓ_1

Théorème: $S_h : f \mapsto h * f$ avec $h \in \mathcal{D}'(\mathbb{Z})$ est ℓ_1 -stable $\Leftrightarrow h \in \ell_1(\mathbb{Z})$

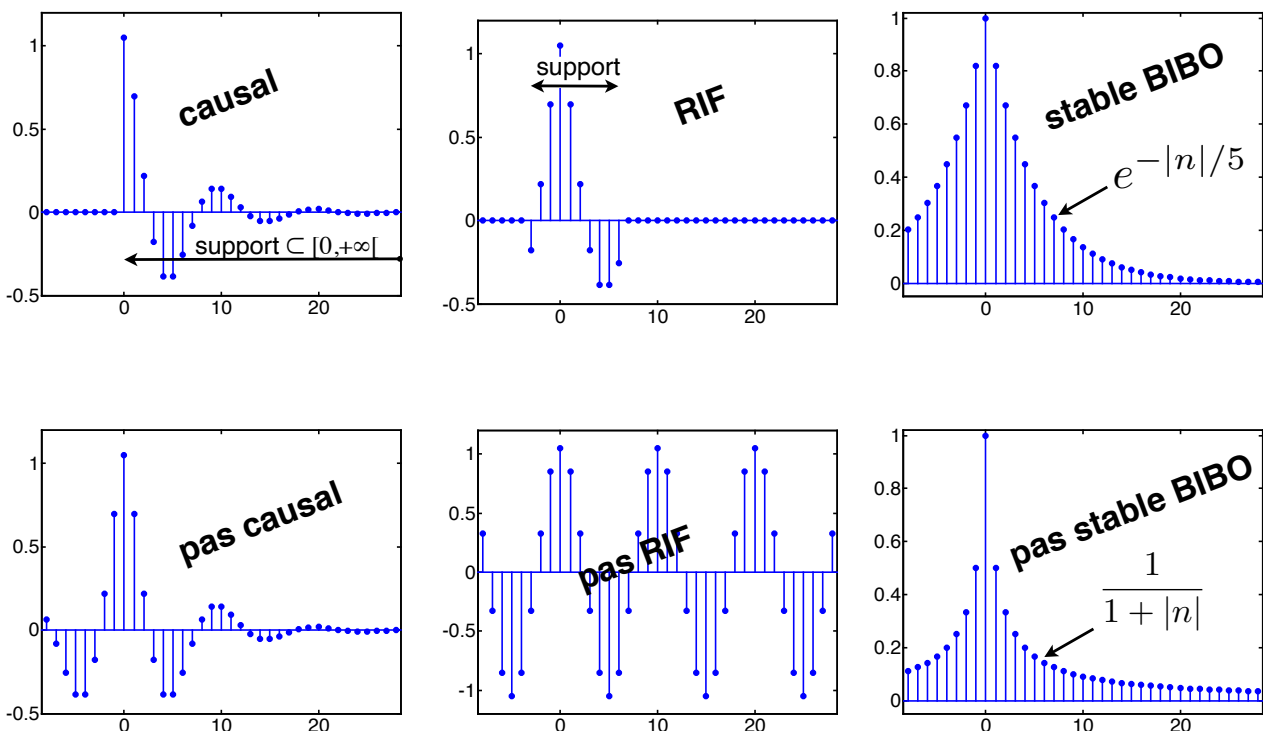
Preuve:

$$1) h, f \in \ell_1(\mathbb{Z}) \Rightarrow h * f \in \ell_1(\mathbb{Z})$$

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |(h * f)[n]| &\leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |h[k]| |f[n - k]| \\ &\leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} |h[k]| |f[m]| \quad (\text{changement de variable}) \\ &\leq \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |h[k]| \right) \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} |f[m]| \right) = \|h\|_{\ell_1} \|f\|_{\ell_1} \end{aligned}$$

$$2) \|S_h\{f\}\|_{\ell_1} \leq C \|f\|_{\ell_1} \Rightarrow h \in \ell_1(\mathbb{Z})$$

On prend $f[\cdot] = \delta[\cdot]$ avec $\|\delta[\cdot]\|_{\ell_1} = 1$ et $S_h\{\delta\} = h$, qui donne $\|h\|_{\ell_1} < C$.



Composition de systèmes LID

$$f[n] \rightarrow \boxed{T_k\{\cdot\}} \rightarrow g[n] = T_k\{f\}[n] \Leftrightarrow f[n] \rightarrow \boxed{h_k} \rightarrow g[n] = (h_k * f)[n]$$

Réponses impulsionnelles: $h_k[n] = T_k\{\delta\}[n]$

■ Mise en série (associativité)

$$f[n] \rightarrow \boxed{h_1} \rightarrow \dots \rightarrow \boxed{h_K} \rightarrow g[n] \Leftrightarrow f[n] \rightarrow \boxed{h[n] = (h_1 * h_2 * \dots * h_K)[n]} \rightarrow g[n]$$

■ Mise en parallèle (distributivité)

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} a_1 \\ \vdots \\ a_K \end{array} \downarrow \begin{array}{c} \otimes \\ \vdots \\ \otimes \end{array} \begin{array}{c} \boxed{h_1} \\ \vdots \\ \boxed{h_K} \end{array} \begin{array}{c} \nearrow \\ \vdots \\ \nearrow \end{array} \oplus \rightarrow g[n] \end{array} \Leftrightarrow f[n] \rightarrow \boxed{h[n] = \sum_{k=1}^K a_k h_k[n]} \rightarrow g[n]$$

Algèbre des opérateurs LID

- Opérateur LIT: $T\{\cdot\}$ (les variables d'entrée et de sortie sont des signaux)
- Composition: $T_2\{T_1\{f\}\}[n] = T_2T_1\{f\}[n]$
- Commutativité: $T_2T_1\{f\} = T_1T_2\{f\} \Leftrightarrow (h_1 * h_2)[n] = (h_2 * h_1)[n]$
- Distributivité: $(a_1T_1 + a_2T_2)T\{f\} = (a_1T_1T + a_2T_2T)\{f\}$
 $\Leftrightarrow ((a_1h_1 + a_2h_2) * h)[n] = a_1(h_1 * h)[n] + a_2(h_2 * h)[n]$
- Opérateur inverse: T^{-1} t. q. $T^{-1}T\{f\}[n] = I\{f\}[n] = f[n]$
- Itération (mise à la puissance): $T T\{f\} = T^2\{f\}$

Exemple de manipulation

$$(S - 3I)^2 = S^2 - 6S + 9I$$

(mêmes règles que la multiplication des polynômes)

Opérateurs de décalage:

$$S\{f\}[n] \triangleq f[n-1]$$

$$S^k\{f\}[n] = f[n-k]$$

$$I = S^0 = \text{identité}$$

Application: convolution de signaux de support fini

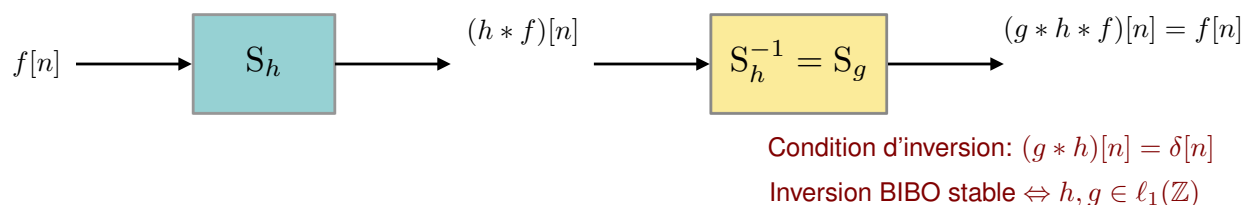
Soient h_1 et h_2 deux réponses impulsionnelles causales de longueur N_1 et N_2 . Alors,

$$\begin{aligned} S_{h_1} &= \sum_{k=0}^{N_1-1} h_1[k] S^k \\ S_{h_2} &= \sum_{k=0}^{N_2-1} h_2[k] S^k \\ S_{h_1 * h_2} &= \sum_{k=0}^{N_1+N_2-1} (h_1 * h_2)[k] S^k \end{aligned} \quad \text{NB: } S^0 = I$$

Exemple: $C = \text{CONV}([-1, 1], [0, 1, 2, 3, 4]) = [0, -1, -1, -1, -1, 4]$

$$\begin{aligned} &(-I + S)(S + 2S^2 + 3S^3 + 4S^4) \\ &= -S - 2S^2 - 3S^3 - 4S^4 \\ &\quad + S^2 + 2S^3 + 3S^4 + 4S^5 \\ &= 0S^0 - 1S - 1S^2 - 1S^3 - 1S^4 + 4S^5 \end{aligned}$$

Opérateur inverse



L'opérateur de convolution $S_h : \ell_\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \ell_\infty(\mathbb{R})$ est **injectif** si la condition $S_h\{f_1\} = S_h\{f_2\}$ pour $f_1, f_2 \in \ell_\infty(\mathbb{Z})$ implique que $f_1 = f_2$.

Propriété: S_h est injectif sur $\ell_\infty(\mathbb{Z})$ ssi il existe $g \in \ell_1(\mathbb{Z})$ tel que

$$(h * g)[n] = (g * h)[n] = \delta[n].$$

Dans ce cas, S_h admet un **inverse de convolution** $S_g = S_h^{-1} : \ell_\infty(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell_\infty(\mathbb{Z})$.

Une condition **nécessaire et suffisante** pour l'existence de cet inverse avec $g \in \ell_1(\mathbb{Z})$ est que $H_d(\omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h[n] e^{-j\omega n}$ (la réponse fréquentielle discrète de h) ne s'annule pas pour $\omega \in [-\pi, \pi]$ (Lemme de Wiener).

Opérateur inverse: exemples

Opérateur	$h[n]$	$g[n]$ tel que $(g * h)[n] = \delta[n]$
S^{k_0}	$\delta[n - k_0]$	$\delta[n + k_0]$
$I - aS$	$\delta[n] - a\delta[n - 1]$	$u[n]a^n \in \ell_1(\mathbb{Z})$ si $ a < 1$ ou $-\mathbb{1}_{[-\infty \dots -1]}[n]a^n \in \ell_1(\mathbb{Z})$ lorsque $ a > 1$.

Dans certain cas, on peut aussi trouver un $g \notin \ell_1(\mathbb{Z})$ tel que $(h * g)[n] = (g * h)[n] = \delta[n]$, mais l'opérateur inverse correspondant $S_g = S_h^{-1} : \mathcal{D}(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{Z})$ est à manier avec prudence.

Par exemple: $(I - aS)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n S^n$ pour $|a| \geq 1$.

Attention aux manipulations douteuses !

$T_{h_{\text{diff}}} : f \mapsto f * h_{\text{diff}}$ avec $h_{\text{diff}} = \delta[\cdot] - \delta[\cdot - 1]$ n'est pas injectif sur $\ell_{\infty}(\mathbb{Z})$
car $T_h\{\alpha \cdot p_0\} = 0$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et $p_0[n] = 1 \in \ell_{\infty}(\mathbb{Z})$.

On vérifie aisément que $(u * h_{\text{diff}})[n] = (h_{\text{diff}} * u)[n] = \delta[n]$.

$$(u * h_{\text{diff}}) * 1 = (\delta * 1) = 1$$

$$u * (h_{\text{diff}} * 1) = u * 0 = 0$$

Comme la convolution est (en principe) associative, peut-on en déduire que $1 = 0$?



$$u[\cdot], 1 \notin \ell_1(\mathbb{Z})$$

Opérateurs de convolution $\ell_p(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell_p(\mathbb{Z})$

■ Inégalité de Young discrète

Théorème

Pour tout $f \in \ell_p(\mathbb{Z})$ avec $p \geq 1$ et $h \in \ell_1(\mathbb{Z})$, on a:

$$\|h * f\|_{\ell_p} \leq \|h\|_{\ell_1} \|f\|_{\ell_p}.$$

Ceci implique que l'opérateur de convolution $f \mapsto h * f$ est ℓ_p -stable.

Les deux cas extrêmes où la conditions $h \in \ell_1(\mathbb{Z})$ est aussi **nécessaire**:

- $p = \infty$: Stabilité BIBO
- $p = 1$: Stabilité de composition

Preuve de l'inégalité de Young discrète

On choisit $p, p' \geq 1$ tels que $|h[n]|^1 = |h[n]|^{1/p} |h[n]|^{1/p'}$ et on applique l'inégalité de Hölder:

$$\begin{aligned} |(h * f)[n]| &\leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} |h[k]| |f[n - k]| \\ &\leq \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |h[k]| |f[n - k]|^p \right)^{1/p} \underbrace{\left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |h[k]| \right)^{1/p'}}_{\|h\|_{\ell_1}^{1/p'}}. \end{aligned}$$

En sommant et élevant à la puissance p , on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |(h * f)[n]|^p &\leq \|h\|_{\ell_1}^{p/p'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |h[n]| |f[n - k]|^p \right) \\ &= \|h\|_{\ell_1}^{p/p'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} |h[n]| |f[m]|^p \quad (\text{changement de variable}) \\ &= \|h\|_{\ell_1}^{p/p'} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |h[n]| \right) \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} |f[m]|^p \right) \\ &= \|h\|_{\ell_1}^{(p/p') + 1} \|f\|_{\ell_p}^p = (\|h\|_{\ell_1} \cdot \|f\|_{\ell_p})^p \end{aligned}$$

Équivalence LIT/LID

Lien avec la convolution continue: en utilisant la représentation continue des signaux discrets

$$\begin{aligned} f[n] & \quad f_T(t) = \sum_n f[n] \cdot \delta(t - nT) \\ g[n] & \xrightarrow{\text{passage discret} \rightarrow \text{continu}} g_T(t) = \sum_n g[n] \cdot \delta(t - nT) \\ (f * g)[n] & \quad (f_T * g_T)(t) = \sum_n (f * g)[n] \cdot \delta(t - nT) \end{aligned}$$

Un système LID est équivalent à un système LIT dont la réponse impulsionnelle prend la forme d'une somme d'impulsions de Dirac équidistantes:



$$h(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h[k] \cdot \delta(t - kT)$$

Table de convolutions discrètes

$f_1[n]$	$f_2[n]$	$(f_1 * f_2)[n]$	
$f[n]$	$\delta[n - n_0]$	$f[n - n_0]$	
$a^n u[n]$	$u[n]$	$\left(\frac{a}{a-1}a^n - \frac{1}{a-1}\right)u[n]$	si $a \neq 1$
$a^n u[n]$	$b^n u[n]$	$\left(\frac{a}{a-b}a^n - \frac{b}{a-b}b^n\right)u[n]$	si $a \neq b$
$u[n]$	$u[n]$	$(n+1)u[n] = s_+^1[n]$	
$s_+^{N_1}[n]$	$s_+^{N_2}[n]$	$s_+^{N_1+N_2+1}[n]$	
$s_+^N[n]a^n$	$b^n u[n]$	$\frac{1}{(1-a/b)^{N+1}} \cdot b^n u[n] - \sum_{k=0}^N \frac{a/b}{(1-a/b)^{N+1-k}} \cdot s_+^k[n]a^n$	si $a \neq b$

8.6 TRANSFORMÉE EN Z

- Définition
- Convolution/multiplication
- Échantillonnage
- Zone de convergence et inversion
- Propriétés de la transformée en z
- Rayon de convergence
- Lien avec les séries de Taylor
- Inversibilité
- Table de transformées en z

8-63

Transformée en z: définition

Soit un signal discret, sa transformée en z se définit formellement par



$$F(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f[n] z^{-n}$$

Attention: même notation (majuscule) que pour une transformée de Fourier.

En général, on ne cherche pas à évaluer la transformée en z pour des valeurs spécifiques de z ; on l'utilise pour ses propriétés

- **algébriques:** expression simple des systèmes discrets
- de représentation: $f[\cdot]$ (signal discret) $\Leftrightarrow F(z)$ (transformée en z = série formelle)

Exception: $z = e^{j\omega}$ où $\omega \in [-\pi, \pi]$ (cf. Transformée de Fourier Discrète)

Pourquoi une série en z^{-n} et pas en z^n ?

Une convention arbitraire peu pratique mais, hélas, universelle...

Convolution/multiplication

La transformée en z de la convolution discrète de deux signaux est le produit des deux transformées en z



$$(f * g)[n] \xrightarrow{\text{transformée en } z} F(z) \cdot G(z)$$

Preuve:

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (f * g)[n] \cdot z^{-n} &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} f[k] \cdot g[n - k] \right) \cdot z^{-n} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} f[k] \cdot g[n - k] \cdot z^{-n} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} f[k] \cdot \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} g[n - k] \cdot z^{-n} \right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f[k] \cdot \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} g[m] \cdot z^{-m-k} \right) \\ &= \sum_k f[k] \cdot z^{-k} \cdot G(z) \\ &= F(z) \cdot G(z) \end{aligned}$$

Remarque: une multiplication arithmétique est une convolution (avant report des dizaines)!

$$\begin{aligned} 1.3 \times 5.6 &= (\underbrace{1}_{f[0]} \cdot 10^0 + \underbrace{3}_{f[-1]} \cdot 10^{-1}) (\underbrace{5}_{g[0]} \cdot 10^0 + \underbrace{6}_{g[-1]} \cdot 10^{-1}) \\ &= \underbrace{1 \times 5}_{(f*g)[0]} \cdot 10^0 + \underbrace{(1 \times 6 + 3 \times 5)}_{(f*g)[-1]} \cdot 10^{-1} + \underbrace{3 \times 6}_{(f*g)[-2]} \cdot 10^{-2} \end{aligned}$$

Échantillonnage

Soit $f[n]$ un signal discret dont la transformée en z est donnée par $F(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f[k] z^{-k}$.



$$\begin{aligned} (\uparrow M)f[n] & \xrightarrow{\text{transformée en } z} F(z^M) \\ (M \downarrow)f[n] & \xrightarrow{\text{transformée en } z} \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} F\left(z^{1/M} e^{j \frac{2\pi m}{M}}\right) \end{aligned}$$

Preuves:

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \underbrace{(\uparrow M)f[n]}_{=f[m] \text{ si } n=m \cdot M \text{ et } 0 \text{ sinon}} \cdot z^{-n} &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} f[m] \cdot z^{-mM} = F(z^M) \\ \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} F\left(z^{1/M} e^{j \frac{2\pi m}{M}}\right) &= \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} f[n] z^{-n/M} e^{-j \frac{2\pi mn}{M}} \\ &= \frac{1}{M} \sum_{n \in \mathbb{Z}} f[n] z^{-n/M} \underbrace{\sum_{m=0}^{M-1} e^{-j \frac{2\pi mn}{M}}}_{\begin{aligned} &= 0 \text{ si } (n \bmod M) \neq 0 \\ &= M \text{ si } (n \bmod M) = 0 \end{aligned}} \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} f[m \cdot M] z^{-m} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} (M \downarrow)f[m] z^{-m} \end{aligned}$$

Zone de convergence (ROC) et inversion

Rappel: $F(z) \triangleq \sum_{n \in \mathbb{Z}} f[n] z^{-n}$

- ROC ("region of convergence") = zone de convergence

$$\text{ROC} = \{z \in \mathbb{C} : \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} f[n] z^{-n} \right| < \infty\}$$

- Inversion par intégration complexe (si $F(z)$ est analytique sur Γ)

$$f[n] = \frac{1}{j2\pi} \oint_{\Gamma} F(z) z^{n-1} dz \quad \text{où } \Gamma \text{ est un contour fermé inclu dans ROC}$$

- Cas particulier où ROC inclu le cercle unité: $\{z = e^{j\omega} : \omega \in [-\pi, \pi]\}$

$$f[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

Lien avec la transformée de Fourier en temps discret (voir Chap. 10)

Propriétés de la transformée en z

Opération	Signal discret	Transformée en z
Définition	$f[n]$	$F(z) \triangleq \sum_{n \in \mathbb{Z}} f[n] z^{-n}$
Linéarité	$\alpha \cdot f[n] + g[n]$	$\alpha \cdot F(z) + G(z), \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}$
Décalage	$f[n - n_0]$	$z^{-n_0} F(z)$
Retournement	$f[-n]$	$F(1/z)$
Sur-échantillonnage	$(\uparrow M) f[n]$	$F(z^M)$
Sous-échantillonnage	$(M \downarrow) f[n]$	$\frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} F\left(z^{1/M} e^{j\frac{2\pi k}{M}}\right)$
Multiplication par a^n	$a^n \cdot f[n]$	$F(z/a)$
Multiplication par n	$n \cdot f[n]$	$-z \frac{d}{dz} F(z)$
Convolution	$(f_1 * f_2)[n]$	$F_1(z) \cdot F_2(z)$

Complément: Rayon de convergence

Pour les signaux à support semi-fini, la zone de convergence de la transformée en z (ROC) peut être spécifiée de façon précise. Le critère déterminant est le comportement de $f[n]$ pour $n \rightarrow \pm\infty$.

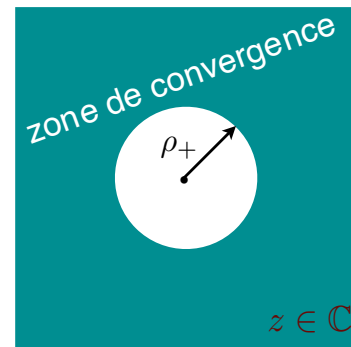
Définition: $f[n]$ est à **support semi-fini** ssi il existe n_0 tel que

- soit $f[n] = 0$ pour tout $n < n_0$ (support semi-fini **positif**)
- soit $f[n] = 0$ pour tout $n > n_0$ (support semi-fini **négatif**)

Si $f[n]$ est à support semi-fini positif, alors $F(z)$ devient une série entière en z^{-1} dont le domaine de convergence est donné par

$$\text{ROC} = \{z \in \mathbb{C} : |z| > \rho_+\} \text{ où } \rho_+ = \limsup_{n \rightarrow +\infty} |f[n]|^{1/n}$$

Rappel: $\limsup_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sup_{k \geq n} u_k \right)$



Si $f[n]$ est à support semi-fini négatif, alors $F(z) = \sum_n f[-n]z^n$ devient une série entière en z dont le domaine de convergence est donné par

$$\text{ROC} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < \rho_-\} \text{ où } \rho_- = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow +\infty} |f[-n]|^{1/n}}$$

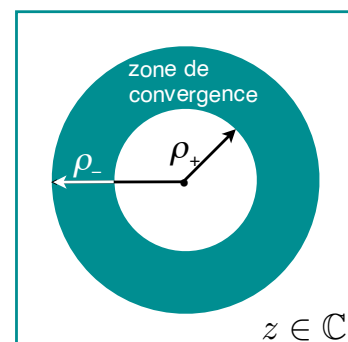


Et dans le cas où

$$\underbrace{\limsup_{n \rightarrow +\infty} |f[n]|^{1/n}}_{\rho_+} < \underbrace{\left(\limsup_{n \rightarrow +\infty} |f[-n]|^{1/n} \right)^{-1}}_{\rho_-}$$

$F(z)$ est convergente dans la couronne

$$\text{ROC} = \{z \in \mathbb{C} : \rho_+ < |z| < \rho_-\}$$



Exemples

- $f[n] = \delta[n - n_0]$ correspondant, au choix,

- à l'impulsion discrète localisée en n_0
- au système LID S^{n_0} (décalage de n_0 échantillons)

est à support fini, d'où $\rho_+ = 0$. On a donc $F(z) = z^{-n_0}$ avec $\text{ROC} = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

- $f[n] = a^n u[n]$ est à support *semi-infini positif* et $\rho_+ = |a|$. On a donc

$$\begin{aligned} F(z) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} a^n u[n] \cdot z^{-n} \\ &= \sum_{n \geq 0} (az^{-1})^n = \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad \text{avec} \quad \text{ROC} = \{z \in \mathbb{C} : |z| > |a|\} \end{aligned}$$

- $f[n] = a^{|n|}$ est à support *infini*. On calcule $\rho_+ = |a|$ et $\rho_- = |a|^{-1}$. Donc, si l'on a $|a| < 1$ (le vérifier!)

$$F(z) = \frac{1 - a^2}{(1 - az)(1 - az^{-1})} \quad \text{avec} \quad \text{ROC} = \{z \in \mathbb{C} : |a| < |z| < |a|^{-1}\}$$

Lien avec les séries de Taylor

Soit $f[n]$ à support *semi-fini positif* ($n \geq n_0$). Si ρ_+ n'est pas infini, alors $P(z) = z^{-n_0} F(z^{-1})$ est une fonction analytique dans le disque $|z| < \rho_+^{-1}$. Les $f[n]$ sont donc donnés par le **développement de Taylor** de $P(z)$ autour de $z = 0$:

$$f[n + n_0] = \frac{1}{n!} \cdot \frac{d^n}{dz^n} \left(P(z) \right) \Big|_{z=0}$$

De même, soit $f[n]$ à support *semi-fini négatif* ($n \leq n_0$). Si ρ_- n'est pas nul, alors $z^{n_0} F(z)$ est une fonction analytique dans le disque $|z| < \rho_-$. Les $f[n]$ sont donc donnés par le **développement de Taylor** de $z^{n_0} F(z)$ autour de $z = 0$:

$$f[n_0 - n] = \frac{1}{n!} \cdot \frac{d^n}{dz^n} \left(z^{n_0} F(z) \right) \Big|_{z=0}$$

Rappel: une fonction est analytique dans un domaine du plan complexe si sa série de Taylor converge uniformément dans tout ce domaine.

Inversibilité

Étant donné $F(z)$, comment retrouver les coefficients $f[n]$? Ce problème peut avoir **plusieurs solutions** s'il existe des lieux dans \mathbb{C} où $F(z)$ n'est pas analytique.

$$u[n] \xrightarrow{\text{Transformée en } z} \sum_{n \geq 0} z^{-n} = \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad \text{pour } |z| > 1$$

$$-u[-n - 1] \xrightarrow{\text{Transformée en } z} - \sum_{n \leq -1} z^{-n} = -\frac{z}{1 - z} = \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad \text{pour } |z| < 1$$

La solution est cependant unique dans chaque couronne où $H(z)$ est analytique.

Inverser la transformée en z revient donc à

1. Identifier la ou les couronnes $\{z \in \mathbb{C} : \rho_1 < |z| < \rho_2\}$ où $F(z)$ est analytique (souvent, il suffit d'identifier les pôles de $F(z)$).
2. Dans chacune de ces couronnes, utiliser la formule $f[n] = \frac{1}{j2\pi} \oint_{\Gamma} z^{n-1} F(z) dz$ où Γ est un contour fermé contenu dans la couronne (p. ex. un cercle).

Remarque: Quand on sait par avance que $f[\cdot]$ est à *support semi-fini*, il est plus simple d'utiliser la méthode de la série de Taylor.

Table de transformées en z

$f[n]$	$F(z)$	ROC = zone de convergence
$\delta[n - n_0]$	z^{-n_0}	$\mathbb{C} \setminus \{0\}$ si $n_0 > 0$, ou \mathbb{C} si $n_0 \leq 0$
$u[n]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$\{z \in \mathbb{C} : z > 1\}$
$s_+^N[n]$	$\frac{1}{(1 - z^{-1})^{N+1}}$	$\{z \in \mathbb{C} : z > 1\}$
$a^n u[n]$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$\{z \in \mathbb{C} : z > a \}$
$-a^n u[-n - 1]$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$\{z \in \mathbb{C} : z < a \}$
$a^n s_+^N[n]$	$\frac{1}{(1 - az^{-1})^{N+1}}$	$\{z \in \mathbb{C} : z > a \}$
$(-1)^{N+1} a^n s_+^N[-n - N - 1]$	$\frac{1}{(1 - az^{-1})^{N+1}}$	$\{z \in \mathbb{C} : z < a \}$
$\frac{1}{n} u[n - 1]$	$-\log(1 - z^{-1})$	$\{z \in \mathbb{C} : z > 1\}$